Διαφορικές Εξισώσεις

06/10/16

2ο Μάθημα

Η γραμμική διαφορική εξίσωση α' τάξης:

$(E): a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x)$ → μη ομογενής

όπου $a_1, a_0, b \in C(I)$, I: διάστημα
↳ συνεχείς δ.ε μέσα σε ένα διάστημα

Λύση της (E): ~~....~~ στο $I_1 \subseteq I$, $y \in C^1(I)$
και ικανοποιεί την (E)

$$\left.\begin{array}{l} (C) \quad y(x_0) = y_0 \\ (x_0 \in I) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Πρόβλημα αρχικών τιμών } (E)-(C)$$

Άρα Λύση του Π.Α.Τ (E)-(C): είναι:

$\gamma \in C(I_1)$ λύση του Π.Α.Τ
$x_0 \in I_1$ αν $\gamma \in C^1(I_1)$ και ικανοποιεί την (E) και (C)

- Αν $b(x) = 0$, $x \in I$, τότε (E_0): $a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0$
↳ ομογενής

- Πρέπει $a_1(x) \neq 0$, $x \in I$ και για την (E) πρέπει να μην μηδενίζεται στο I.

$$(E): \quad y'(x) + \frac{a_0(x)}{a_1(x)} \cdot y(x) = \frac{b(x)}{a_1(x)}, \ x \in I$$

Άρα $\boxed{y'(x) + p(x)\cdot y(x) = q(x)}$ (πιο βολική εξίσωση)

Επίλυση της (E_0):

$y'(x) + p(x)y(x) = 0, \ x \in I \Rightarrow$

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = -p(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{y'(x)}{y(x)}dx = -\int p(x)dx \Rightarrow \ln|y(x)| = -\int p(x)\,dx + c_1$$

άρα $y(x) = e^{-\int p(x)dx + c_1}$

$= e^{c} e^{-\int p(x)dx}$

άρα $y(x) = c_1 \cdot e^{-\int p(x)dx}, \ x \in I$

↳ (η ομογενής εξίσωση δέχεται πάντα τη μηδενική λύση)

• για $c_1 = 0$ μου δίνει πάντα την τετριμμένη λύση. Άρα $c_1 \neq 0$ πάντα.

• Αν $y(x_0) = y_0$ Για $x = 0$ τότε $y_0 = c_1' e^{-\int p(x)dx}\Big|_{x=x_0}$

Άρα $c_1 = y_0 \cdot e^{\int p(x)dx}\Big|_{x=x_0}$

(Για πιο εύκολα βάζω αμέσως όλοκλήρωση έτσι: $\int_{x_0}^{x}$ και βγαίνει πιο εύκολα).

Επίλυση του (Ε0) - (C):

$$\text{ΠΑΤ}: \begin{cases} y'(x) + p(x)\cdot y(x) = 0, \ x \in I \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Για $x \in I$, έχουμε: $\frac{y'(x)}{y(x)} = -p(x)$

άρα $\int_{x_0}^{x} \frac{y'(s)}{y(s)} \cdot ds = -\int_{x_0}^{x} p(s)\,ds \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln|y(x)| - \ln|y(x_0)| = -\int_{x_0}^{x} p(s)\,ds \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln\left|\frac{y(x)}{y(x_0)}\right| = -\int_{x_0}^{x} p(s)\cdot ds \Rightarrow$

$\Rightarrow |y(x)| = |y_0|\, e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\cdot ds}$

$\rightsquigarrow \boxed{y(x) = y_0\, e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\,ds}, \ x \in I}$

Άσκηση:

$y' + y\sqrt{x}\cdot\sin^2 x = 0, \ x \geq 0$

$\frac{y'(x)}{y(x)} = -\sqrt{x}\cdot\sin^2 x \Rightarrow$

$\underset{\text{αυθαίρετα}}{\overset{x_0 \geq 0}{\Rightarrow}} \int_{x_0}^{x} \frac{y'(s)}{y(s)}\, ds = -\int_{x_0}^{x} \sqrt{s}\cdot\sin^2(s)\,ds \Rightarrow$

$\Rightarrow \left|\frac{y(x)}{y(x_0)}\right| = e^{-\int_{x_0}^{x} \sqrt{s}\sin^2(s)\,ds} \Rightarrow$

$\Rightarrow |y(x)| = \underbrace{|y(x_0)|}_{=c}\, e^{-\int_{x_0}^{x} \sqrt{s}\cdot\sin^2 s\,ds}.$

Άρα:

$$y(x) = c_1 e^{-\int_{x_0}^{x} \sqrt{s}\cdot \sin^2 s \cdot ds}, \quad x \in I \rightarrow$$ για $x \to +\infty$ όλες οι λύσεις μηδενίζονται

Έχω στη πάνω λύση. στην άσκηση. όπως είπαμε προηγουμένως.

→ Άρα αρκεί ν.δ.ο $\lim_{x\to+\infty} \int_{x_0}^{x} \sqrt{s}\cdot \sin^2 s \, ds = +\infty$

(Σπίτι να το λύσουμε)

Η μη ομογενής Γ.Δ.Ε (Ε):

$$y'(x) + p(x)\cdot y(x) = q(x), \quad x \in I$$

Έστω η συνάρτηση: $e^{\int p(x)\cdot dx}$ και πολ/ζω

άρα $e^{\int p(x)\,dx}\cdot y'(x) + p(x)\cdot y(x)\cdot e^{\int p(x)\,dx} = e^{\int p(x)\,dx}\cdot q(x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow e^{\int p(x)\cdot dx}\cdot y'(x) + \left[e^{\int p(x)\cdot dx}\right]' y(x) = e^{\int p(x)\cdot dx}\cdot q(x), \quad x\in I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[y(x)\, e^{\int p(x)\cdot dx}\right]' = q(x)\cdot e^{\int p(x)\cdot dx}, \quad x \in I \Rightarrow$$

$$\xRightarrow[\text{ολοκλήρωση}]{\text{Αορίστη}} y(x) e^{\int p(x)\,dx} = \int q(x)\cdot e^{\int p(x)\cdot dx} + c_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = e^{-\int p(x)\,dx}\left[c_1 + \int q(x)\cdot e^{\int p(x)\,dx}\,dx\right]}$$

Παράδειγμα:

→ πρέπει να φέρουμε το Π.Ο γενικά. το οποίο καθορίζεται από την αρχική τιμή που μας δίνει

$$y' + tgx \cdot y = \sin x, \quad x \in \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

α) πολ/ζω με το $e^{\int tgx \cdot dx}$

β) ή γράφω κατευθείαν τον τύπο:

Λύση: β) $y(x) = e^{-\int tgx \cdot dx} \cdot \left[c + \int \sin x \, e^{\int tgx dx} \cdot dx\right]$

όπου $\int tgx dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot dx = \int \frac{-(\cos x)'}{\cos x} dx = -\log|\cos x|$

Άρα $y(x) = e^{\log|\cos x|} \cdot \left[c + \int \sin x \, e^{-\log|\cos x|} dx\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow y(x) = |\cos x| \left[c + \int \frac{\sin x}{|\cos x|} dx\right]$

Άρα $y(x) = |\cos x| \left(c - \log|\cos x|\right)$

$$y(x) \, e^{\int_{x_0}^{x} p(s) ds} - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} q(s) \cdot e^{\int_{x}^{s} p(u) du} ds$$

(συνέχεια θεωρίας) →

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} p(s) ds} \left[y(x_0) + \int_{x_0}^{x} q(s) \, e^{\int_{x_0}^{s} p(u) du} ds \right]$$

$$\boxed{y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} p(s) ds} \left[y(x_0) + \int_{x_0}^{x} q(s) \cdot e^{\int_{x_0}^{s} p(u) du} ds \right], x \in I}$$

και λύνω με $y(x_0)$ → λύση του (Ε) − (C)

Τύπος

Εφαρμογές – Ασκήσεις :

(1) $\left.\begin{array}{l} xy' - 2y = -x^2 \\ y(1) = 0 \end{array}\right\}$ Άρα $x>0$ το πεδίο ορισμού

α) ή εφαρμόζω τον τύπο

β) ή πολ/ζω με το x

Λύση :

β) Άρα $x^2y' - 2xy = -x^3$, $x>0$

και διαιρώ με το x^4.

άρα $\left(\frac{y}{x^2}\right)' = -\frac{1}{x}$, $x>0 \Rightarrow$

ολοκληρώνω $\Rightarrow$ $\int_1^x \left(\frac{y(s)}{s^2}\right)' ds = -\int_1^x \frac{1}{s} ds \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{y(x)}{x^2} - \frac{y(1)}{1^2} = -\left[\ln|s|\right]_1^x$

(Αν βρούμε και άλλους τρόπους μόνοι μας καλύτερα)

(2) $(1+x^2)y' + 4x\,y = x$, $y(1) = \frac{1}{4}$

με π.ο : $x \in \mathbb{R}$

$y' + \frac{4x}{1+x^2}\cdot y = \frac{x}{1+x^2}$

$y(x) = e^{-\int_1^x \frac{4s}{1+s^2}ds}\left[y(1) + \int_1^x \frac{s}{1+s^2}\cdot e^{\int_1^s \frac{4u}{1+u^2}du} ds\right]$, $x\in\mathbb{R}$

$\int_1^s \frac{4u}{1+u^2} du = 2\int_1^s \frac{(2\cdot u^2)'}{(1+u^2)} du = \ldots\ldots = \ldots$

(3) $y' + by = \cos(ax)$, $a \neq 0$, $b \neq 0$

→ Να επιλυθεί

→ αν $b>0$ και y λύση ∃ το $\lim_{x\to+\infty} y(x)$??

Λύση:

→ $y(x) = e^{-\int_0^x b\,ds}\left[y(0) + \int_0^x \cos(as)\, e^{\int_0^s b\,d\sigma}\right], x\in\mathbb{R}$

Άρα $\boxed{y(x) = e^{-bx} y(0) + e^{-bx}\int_0^x \cos(as)\, e^{bs}\, ds,\ x\in\mathbb{R}}$

• → Κάνω δύο φορές παραγοντική ολοκλήρωση και βγαίνει: $y(x) = c_1 e^{-bx} + \frac{1}{a^2+b^2}(b\sin ax - a\cos ax)$

$\lim_{x\to+\infty} y(x)$ // Παρατηρώ ότι: $\lim_{x\to+\infty} e^{-bx} = 0$ άρα μου μένει το $\lim_{x\to+\infty} b\sin(ax) - a\cos(ax)$ και δείχνω

• ότι ∄ με ακολουθίες

με $x_n = \frac{2\nu\pi + \frac{\pi}{2}}{a}$ είναι $\lim_{x\to+\infty} y(x_\nu) = \frac{b}{a^2+b^2}$

$\tilde{x}_\nu = \frac{2\nu\pi}{a}$ είναι $\lim y(\tilde{x}_\nu) = \frac{-a}{a^2+b^2}$

άρα ∄

Παρατήρηση: $A\cos(kx) + B\sin(kx) = c_1\sin(kx-\theta)$

όπου c_1: ένας κατάλληλος αριθμός

Απόδειξη: $A[\cos kx + \underbrace{\frac{B}{A}}_{\text{tg}\theta}\sin kx] = A[\cos kx + \text{tg}\theta \sin kx]$
$= \frac{A}{\cos\theta}[\cos\theta\cos kx + \sin\theta \sin kx]$

$$= \frac{A}{\cos\theta} \cos(\theta + x)$$

$$\frac{A}{\cos\theta} \simeq C$$

<u>Άλλος τρόπος απόδειξης:</u>

$$A\cos\theta k + B\sin k\theta = \sqrt{A^2+B^2}\left(\underbrace{\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}}_{\sin\phi}\cos k\theta + \underbrace{\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}}_{\cos\phi}\sin k\theta\right)$$

$$= \sqrt{A^2+B^2}(\sin\phi\cos k\theta + \cos\phi\sin k\theta)$$

$$= \sqrt{A^2+B^2}\sin(k\theta + \phi)$$

: Εφαρμογές :

$-kv \to$ ~~αντίσταση του αέρα~~

(1) $m \cdot g = F$

εδαφος

$$m \cdot g - kv = m \cdot \gamma$$

$$\boxed{mg - kv = mv'}$$

και λύνουμε τη διαφορική εξίσωση:

$$mv' + kv = m \cdot g$$

<u>1η τάξης:</u> $\boxed{v'(t) + \frac{k}{m}v(t) = g}$

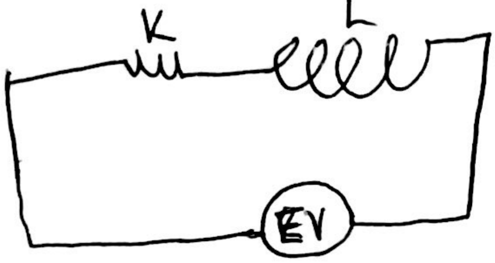
για $t = t_0 \Rightarrow v_0 = 0$

$$\text{Άρα } v(t) = e^{-\int_0^t \frac{k}{m}ds}\left[\cancel{v(0)}^{\,0} + \int_0^t g \cdot e^{\int_0^s \frac{k}{m}du} ds\right]$$

$$= e^{-\frac{k}{m}t} \cdot g \cdot \int_0^t e^{\frac{k}{m}s} ds = \ldots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{m \cdot g}{k}\left(1 - e^{-(k/m) \cdot t}\right.$$

②



$$E = E_R + E_L$$

$$E = IR + L\frac{dI}{dt}$$

αντίσταση: $E_R = R \cdot I$

πηνίο: $E_L = L \cdot \frac{dI}{dt}$

I : ένταση της τάσης $\frac{dq}{dx}$

$$\boxed{E_0(t) = E_0 \sin(\omega \cdot t)}$$

$$L I'(t) + R I(t) = E(t)$$

$$\boxed{I'(t) + \frac{R}{L} I(t) = \frac{1}{L} E(t)}$$

$$I(t) = I(t_0) e^{-\frac{R}{L} t}$$

$$\frac{L \cdot E_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t - \phi)$$

Θεωρία:

$y'(x) + p(x) \cdot y(x) = q(x)$, $x \in \mathbb{R}$ (ιδιαιτερότητες):

π.χ $y' + 2y = q(x)$ | $q(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$

(Παίρνω ορισμένη ολοκλήρωση και ολοκληρώνω τη συνάρτηση ανάλογα με τα διαστήματα και βρίσκω κλάδους)

$$y(x) = e^{-\int_0^x p(s)\,ds}\left[y(0) + \int_0^x q(s) e^{\int_0^s p(u)\,du} ds\right]$$

$$= e^{-\int_0^x 2\,ds}\left[y(0) - \int_0^x (1-s) \cdot e^{\int_0^s 2\,du} ds\right] \quad \Big| \; 0 < x \leq 1$$

$$= e^{-2x}\left[y(0) + \int_0^x (1-s) e^{2s} ds\right]$$

$\underline{1 \leq x}$:

και $y(x) = e^{-\int_0^x 2 ds}\left[y(0) + \int_0^x q(s)\, e^{2s}\, ds\right]$

$= e^{-\int_0^x 2ds}\left[\left[y(0) + \int_0^1 (1-s)\, e^{2s} ds\right] + \left[y(0) + \cancel{\int_1^x 0 \cdot e^{2s} ds}\right]\right]$

<u>Άρα:</u>

$y(x) = e^{-2x}\underbrace{\left[y(0) + \int_0^1 (1-s) e^{2s} ds\right]}_{= K = \text{σταθερό}}$

$= e^{-2x} \cdot K$

- Αν $y(0) > 0$ να εξετάσετε τη συμπεριφορά της $y(x)$ στο άπειρο:

στο $-\infty$ έχουμε $\lim y(x) = 0$

στο $+\infty$ έχουμε $\lim y(x) = +\infty$.

<u>Άσκηση (βιβλίου)</u>: (Σπίτι να το αφήσουμε).

$y' + y = q(x)$

$y(0) = 0$

$q(x) = \begin{cases} 2 & , x \in [0,1] \\ 0 & , x > 1 \end{cases}$, δεν είναι συνεχής στο 1.

<u>Λύση</u>:

$y(x) = \begin{cases} & , 0 < x < 1 \\ & , 1 < x \end{cases}$

συμπεραίνουμε στο τέλος ότι η $y(x)$ είναι συνεχής αλλά όχι παραγωγίσιμη στο 1 αφού κάνω όλα τα σημεία σύγκλισης.